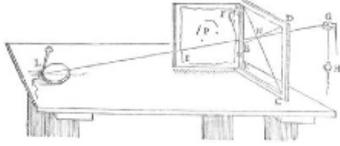





# Computer-Graphik I

## Projektionen & Perspektive



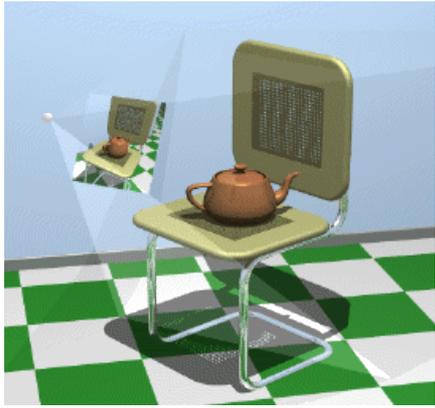

G. Zachmann  
 Clausthal University, Germany  
[zach@in.tu-clausthal.de](mailto:zach@in.tu-clausthal.de)



## Motivation



- Man möchte die virtuelle 3D Welt auf einem 2D Display darstellen



- Viewing** = Setup der richtigen Transformationen, um die 3D-Welt auf den 2D-Bildschirm zu projizieren

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 2

## Projektionen in der Pipeline

- Modeling Transformations
- Illumination (Shading)
- Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)
- Clipping
- Projection (to Screen Space)
- Scan Conversion (Rasterization)
- Visibility / Display

Eye Space / Camera Space

Clip Space (NDC)

Screen Space

Im Folgenden fassen wir unter dem Begriff "Projektion" alle 3 Transformationen zusammen!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11
Projektion und Perspektive 3

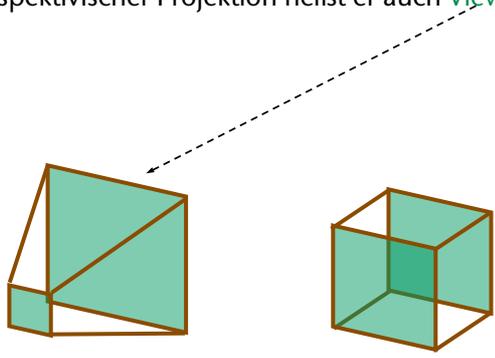
## Orthographische vs. Perspektivische Projektion

- **Perspektivisch** = alle Projektionsstrahlen laufen im Projektionszentrum (COP) zusammen
- **Orthographisch** = parallele Projektionsstrahlen
  - Kann man als Spezialfall der perspektivischen Projektion betrachten

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11
Projektion und Perspektive 5

## Terminologie

- Der Bereich des 3D-Raumes, der auf den Bildschirm projiziert wird, heißt **View Volume**, oder **Viewing Volume**
- Bei perspektivischer Projektion heißt er auch **View Frustum**

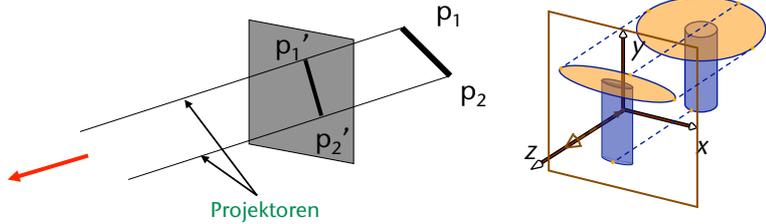


- Lat. "frustum" = (abgebrochener) Brocken

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 6

## Orthographische Projektion

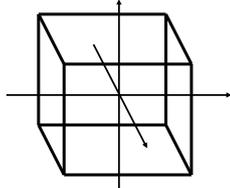
- Punkte werden orthogonal auf die Projektionsebene (*viewing plane*) projiziert
  - Projektionslinien verlaufen parallel zur Normalen der Projektionsebenen
- Eigenschaften:
  - Parallele Linien bleiben parallel
  - Winkelverhältnisse bleiben erhalten, aufgrund der parallelen Verschiebung zu Projektionsebene
- Es gibt noch andere (schiefe) Parallel-Projektionen



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 7

## Die Projektionsmatrix

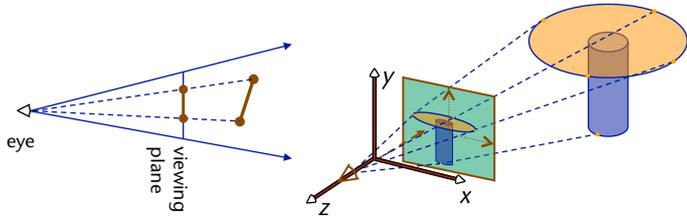
- Annahme: die komplette "virtuelle Welt" befindet sich im (kanonischen) Viewing-Volume (-1, 1, -1, 1, -1, 1)
- Die x- und y-Komponente bleiben unverändert
- Projektionsmatrix: setze z-Komponente auf 0

$$P_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 8

## Perspektivische Projektion

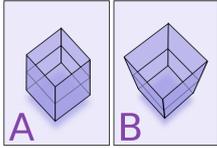
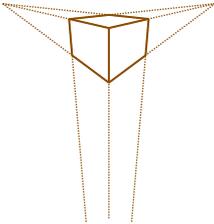
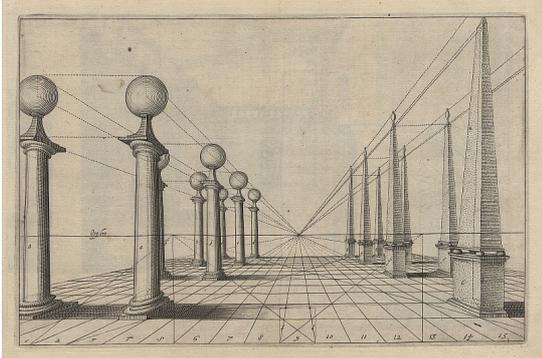
- Am häufigsten verwendet in der Computergraphik & Malerei
- Unser Auge führt eine Zentralperspektive durch ("Lochkamera")
- Punkte werden entlang einer Gerade zum **Zentrum der Projektion** (COP; z.B. Mittelpunkt der Augenlinse) auf die **View-Ebene** projiziert



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 10

## Eigenschaften

- Entfernte Objekte sind kleiner  
(**perspektivische Verzerrung**)
- Parallele Linien werden **nicht auf parallele** Linien abgebildet, sondern laufen scheinbar in einem gemeinsamen Punkt zusammen
  - Solch ein Punkt heißt **Fluchtpunkt**

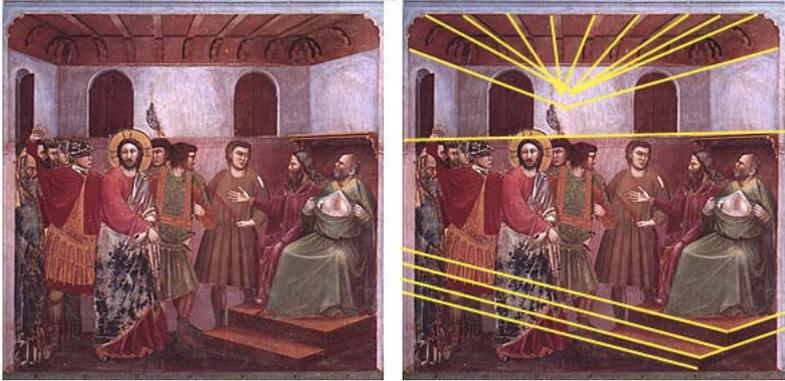




Quelle: Deutsche Fotothek

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 11

## Perspektive in der Geschichte der Malerei

- Erste Ansätze:



Giotto, 1305: Jesus vor Kaiphas

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 13

Brunelleschi's "Peep show" in Florenz, ca. 1410-1420



The Baptistry, San Giovanni, Florence

Duomo and Piazza del Duomo, Firenze

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 14

Schachbrettmuster wurden sehr beliebt



*Christ Handing the Keys to St. Peter*  
Pietro Perugino (1481-82), Fresco, Sixtinische Kapelle, Vatikan

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 15

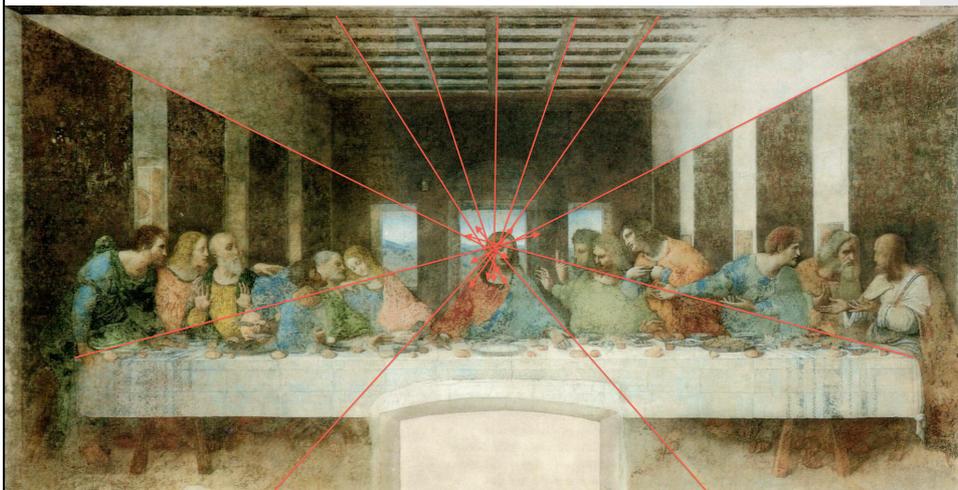
Es dauerte eine Weile bis das Know-How europaweit bekannt war ...



*Reconstruction of the temple of Jerusalem. From William of Tyre: Histoire d'Outremer. France, Rouen, XVe siècle. Artiste: Maître de l'Échevinage*

Ca. 1460-1470

Der gezielte Einsatz der Perspektive: da Vinci's Abendmahl



1494 – 1498

### Erste perspektivische "Rätsel"



Die Gesandten  
Hans Holbein  
der Jüngere  
(1533)

### Eine Satire über Perspektive

"Satire on  
False  
Perspective"  
by William  
Hogarth,  
1753

Bildunterschrift:

Whoever makes a  
DESIGN without  
the Knowledge of  
*PERSPECTIVE* will  
be liable to such  
Absurdities as are  
shewn in this  
**Frontispiece.**



## Die Projektionsmatrix

- Ann.: Kamera im Ursprung, schaut in Richtung negative z-Achse
- Projektion auf eine Ebene  $z = -d$ ,  $d > 0$

$$q = \begin{pmatrix} -p_x \frac{d}{p_z} \\ -p_y \frac{d}{p_z} \\ -d \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -p_x \frac{d}{p_z} \\ -p_y \frac{d}{p_z} \\ -d \\ 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ -\frac{p_z}{d} \end{pmatrix}$$

$$Q = M \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 20

- Mit anschließender Projektion auf Ebene  $z = 0$

$$P_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}$$

- Beachte:
  - Wenn  $d \rightarrow \infty$ , dann entspricht  $P_P$  der orthographischen Projektion
  - Wenn  $d \rightarrow 0$ , dann wird

$$Q = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ -\frac{p_z}{d} \end{pmatrix}$$

instabil

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 21

### Perspektivische Projektion in 2 Schritten

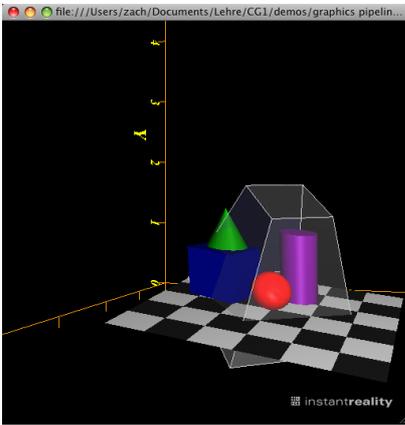
- Wie bei orthographischer Projektion kann man, wegen Clipping, die perspektivische Projektion in 2 Schritten machen:
  - Perspektivische Abbildung (nicht Projektion!)
  - Projektion

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 22

- Die Matrix für Schritt 1 (o.Bew.):
 
$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Achtung: der z-Wert in NDC hängt **nicht linear** vom z-Wert in Weltkoordinaten ab!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 23

## Animation



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 24

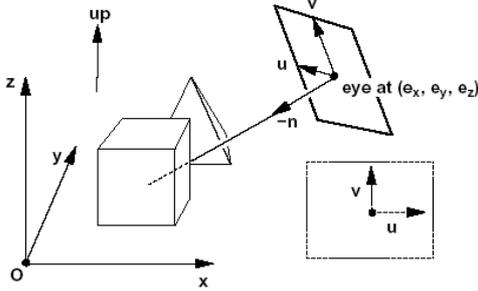
## Eigenschaften von projektiven Transformationen

- Die allgemeine Matrix:
 
$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ q^T & w \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad b, q \in \mathbb{R}^3, \quad w \in \mathbb{R}$$
- Entspricht für  $y = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$  der Abbildung
 
$$\psi: x \mapsto \frac{Ax + b}{q^T x + w}$$
- B und  $\lambda B$  beschreiben dieselbe Abbildung ( $\lambda \neq 0$ )
- Bildet Linien auf Linien ab
- Erhält i. A. **weder** Parallelität **noch** Teilungsverhältnisse
- Erhält aber Doppelverhältnisse!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 25

## Transformation von World Space $\rightarrow$ Eye Space

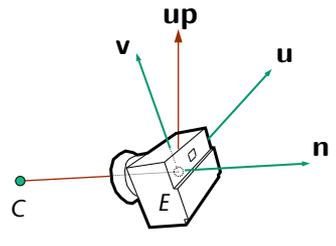
- Heißt **Viewing Transformation** oder **Camera Transformation**
- Parameter zum Positionieren der Kamera:
  - **Augpunkt E**
  - **"Up"-Vektor** in Weltkoordinaten: dieser Vektor soll senkrecht auf dem Bildschirm erscheinen, also parallel zu  $v$
  - Punkt  $C$  in Weltkoordinaten, der in der Mitte des Bildes erscheinen soll (heißt auch **Look-At**)
- Aufgabe: daraus das **Kamerakoordinatensystem  $u, v, n$**  berechnen (**eye space**)



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 26

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{E} - \mathbf{C}}{\|\mathbf{E} - \mathbf{C}\|}$$

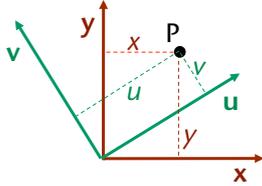
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{up} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{up} \times \mathbf{n}|}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}$$


G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 27

- Transformation von Weltkoord. in Kamerakoord. = Translation + Wechsel der Orthonormalbasis
  - Gegeben: Koord.achsen  $x,y,z$  &  $u,v,n$  und der Punkt  $P = (x,y,z)$
  - Bestimme  $P$  in  $u,v,n$ -Koord., also  $P' = (u,v,n)$
- Wechsel der Orthonormalbasis:
 
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

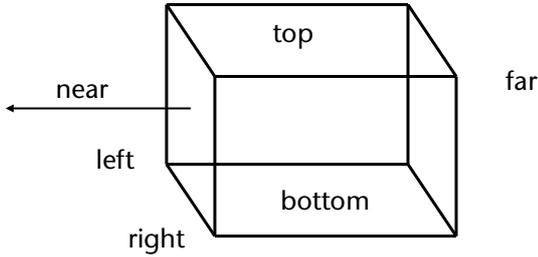
mit  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  etc.



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 28

## Projektion in OpenGL

- Orthographische Projektion



```
glOrtho(left, right, bottom, top, near, far);
```

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 29

■ Perspektivische Projektion:

```
glFrustum( left, right,
           bottom, top,
           near, far );
```

```
gluPerspective( fovy,
                aspect,
                zNear,
                zFar );
```

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 30

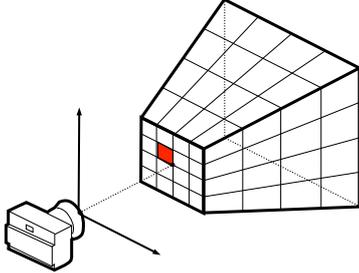
■ Vorsicht bei Perspektive: Öffnungswinkel nicht zu groß wählen!

90°                      60°                      45°

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 31

## Asymmetrisches Frustum

- Kommt manchmal vor, z.B.
  - Stereo-Projektion
  - Rendern eines Posters mit 10000 x 10000 Pixel (Framebuffer zu klein)
  - Mit gluPerspective() nicht möglich
- Poster: Zerlegen in viele Teilbilder mit voller Auflösung

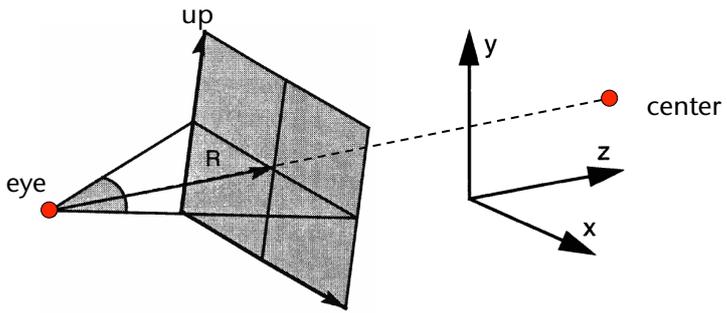


```
glFrustum( left, right,
           bottom, top,
           near, far );
```

Hier ist left  $\neq$  right, top  $\neq$  bottom!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 32

## Festlegen des Viewpoints mittels GL Utility



```
gluLookAt( eyeX, eyeY, eyeZ, centerX, centerY,
           centerZ, upX, upY, upZ );
```

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 33

## Die Projektionsmatrix in OpenGL

- Projektionen werden auch durch Matrizen realisiert
- Achtung: für diese existiert eine eigene "globale" Matrix!
- Alle Transformations-Operationen (`glTranslate`, ..., `glFrustum`, ...) multiplizieren immer mit der aktuell "eingeschalteten" Matrix!!
- Umschalten mittels
 

```
glMatrixMode( { GL_MODELVIEW, GL_PROJECTION } );
```

  - Nach dem Umschalten beziehen sich alle Matrixbefehle auf die entsprechende Matrix
  - Zurückschalten auf `GL_MODELVIEW` nicht vergessen!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 34

- Sollte man die Transformation von Welt- in Kamerakoord. in die MODELVIEW-Matrix oder in die PROJECTION-Matrix multiplizieren?
- Antwort: allg. üblich ist es, sie in die MODELVIEW-Matrix zu stecken, aber es geht genauso die PROJECTION-Matrix
  - In manchen Fällen, z.B. in einer Cave, **muß** man es sogar in der PROJECTION-Matrix machen
- Gesamtansicht aller Matrizen:
 
$$p' = M_{\text{proj}} \cdot V \cdot T \cdot \dots \cdot S \cdot R \cdot p$$

GL\_PROJECTION

Zum Schluss: Transformation ins Kamerakoordinatensystem z.B. mit `gluLookAt` als erstes Kommando

GL\_MODELVIEW

Beliebige Transformationen



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 35

## OpenGL-Beispiel

- Ein typisches OpenGL-Programm sieht dann ungefähr so aus:

```

glColor3f( 0.0, 0.0, 0.0 );
glClear( GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT );

glMatrixMode( GL_PROJECTION );    // set up projection
glLoadIdentity();

glOrtho( -1.0,1.0, -1.0,1.0, 1.0,10.0 );
oder
glFrustum( -1.0,1.0, -1.0,1.0, 1.0,10.0 );

glMatrixMode( GL_MODELVIEW );    // set up camera trf
glLoadIdentity();
gluLookAt( 0,0,1, 0,0,0, 0,1,0 );

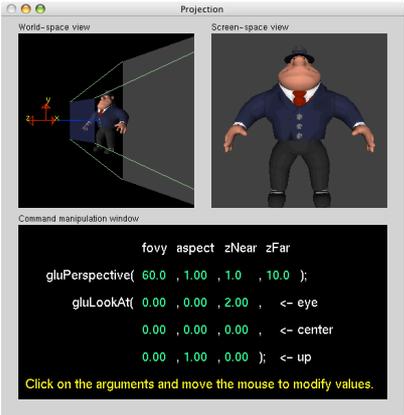
glTranslatef( 0,0,tz );          // set up model-view
glRotatef( alpha, 1.0, 0.0, 0.0 );

render geometry ...

```

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 36

## Demo



<http://www.xmission.com/~nate/tutors.html>

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 37

## Stereo-Sehen

- Wichtiger "depth cue"
  - Nicht der wichtigste: nur bis einige Meter Entfernung
- Disparität im Auge =  $\delta_2 - \delta_1 = \gamma - \alpha$
- Horopter = Punkte mit gleicher Tiefe wie fokussiertes Objekt = 0-Disparität
- Parallaxe auf dem Bildschirm:

Parallaxe

Disparität

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11
Projektion und Perspektive 38

## Projektion

- Falsch: konvergierende Hauptsehstrahlen

Projektions-ebenen

- Problem: vertikale Parallaxe

Heads up text  
Heads up text

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11
Projektion und Perspektive 39

## Stereoscopic Projection

- Richtig: parallele Hauptsehstrahlen  
→ off-axis perspective projection

Proj.ebenen (near planes)

Eye Separation

Cyclop's eye

Zero parallax plane  
("fusion plane")

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 40

- Gegeben eye separation  $i$ , aspect ratio  $w/h$ , horizontaler FOV  $\alpha$ , near  $n$ , zero-parallax depth  $z_0$
- Aufgabe: bestimme *left/right/top/bottom* für **glFrustum()**
- Annahme: kein Head-Tracking, d.h., Zyklopen-Auge befindet sich über der Mitte der Zero-Parallax-Plane
- *top* und *bottom* wie gehabt:  $t = \frac{h}{w} l$
- Berechnung von *left* am Beispiel des linken Auges:

$$l_c = n \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$l' - l_c = i \frac{z_0 - n}{z_0}$$

$$l = l_c + (l' - l_c) - i = l_c - i \frac{n}{z_0}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 41

## Stereoscopic Rendering in Qt

```

// Initialisierung
QGLFormat fmt;
fmt.setStereo(true);
QGLFormat::setDefaultFormat(fmt);
// oder
MyGLWidget* myWidget = new MyGLWidget(fmt, ...);

// Rendering
glDrawBuffer(GL_BACK_LEFT);
glClear(...);
glFrustum(...);
renderScene(...);
glDrawBuffer(GL_BACK_RIGHT);
glClear(...);
glFrustum(...);
renderScene(...);

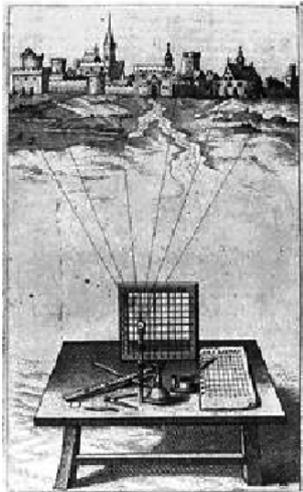
```

<http://doc.trolltech.com/4.2/qglformat.html>

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 42

## Noch einige Beispiele aus der Kunst

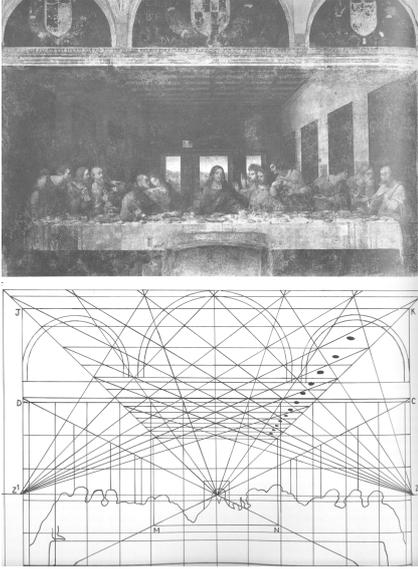
- Theoretisch wurde die Lösung des Problems der Perspektive von Leon Battista Alberti in seinem Buch *Della Pittura*, 1435-1436, beschrieben
- Brunelleschi löste es als erster praktisch 1410-1420



Alberti's *reticolato*

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 45

■ Leonardo da Vinci sagte:  
*There are some who look at the things produced by nature through glass, or other surfaces, or transparent veils. They trace outlines on the surface of the transparent medium... But such an invention is to be condemned in those who do not know how to portray things without it, how to reason about nature with their minds... They are always poor and mean in every invention and in the composition of narratives, which is the final aim of this science*



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 46

Erste Multi-Perspektive



Raffael: *Die Schule von Athen*

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 47

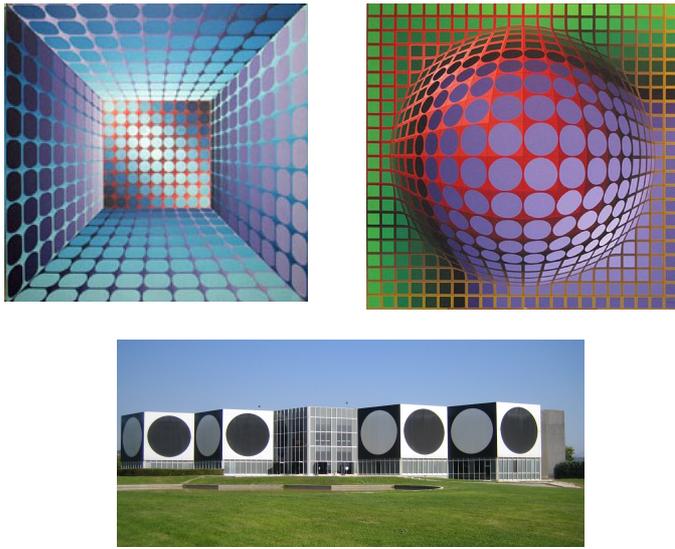
Multi-Perspektive, um den mystischen Eindruck zu erhöhen



De Chirico:

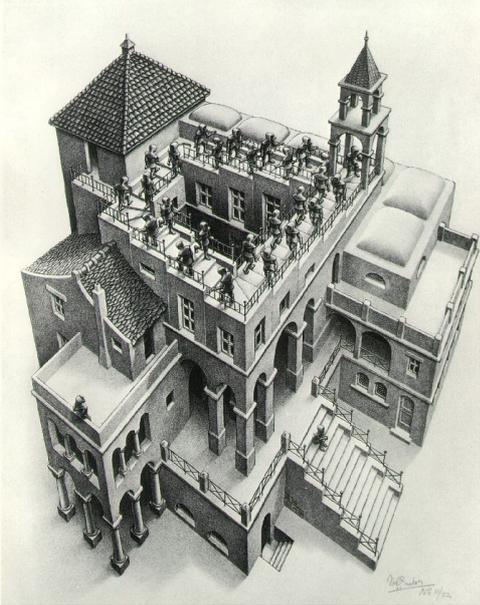
G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 48

Viktor Vasarely: Perspektive in der abstrakten Kunst



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 49

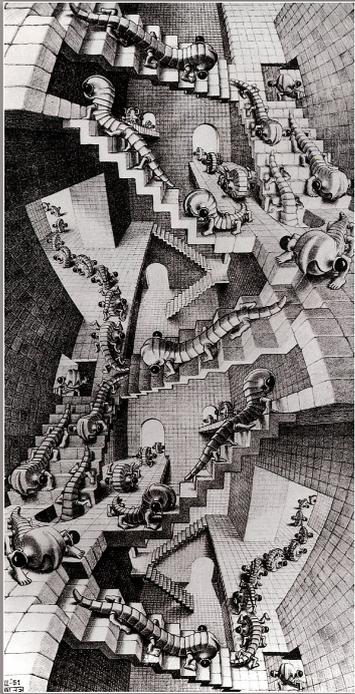
Einsatz der (korrekten) Perspektive zur Irritation des Betrachters



Maurits Cornelis  
ESCHER:  
*Ascending and  
Descending*  
1960, Lithograph

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 50

Nicht-lineare Perspektive



M. C. Escher

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 10/11 Projektion und Perspektive 51

